ある種の時間依存的な非線形発展方程式について (半群と発展方程式)

渡辺, 二郎

数理解析研究所講究録
134巻 1972年 18-36

ある種の時間依存的な
非線形発展方程式について

電気通信大　　渡辺 二郎

§1. 定理

Hを実ヒルベルト空間, φをHから$(-\infty, +\infty]$への下半連続 proper 凸関数とする。φが proper であるとは, φの effective domain $\{u \in H \mid \varphi(u) = +\infty\}$が空でないことである. HからHへの多価写像$\partial\varphi$を次のように定義する:

$$\partial\varphi(u) = \{w \in H \mid \varphi(v) \geqq \varphi(u) + (w, v-u) \ (\forall v \in H)\}.$$

その定義域は$D(\partial\varphi) = \{u \in H \mid \partial\varphi(u) \neq \phi\}$である.

次の(I)−(V)を仮定する([4], [1]参照).

(I) $T > 0$とする. 各$t \in [0, T]$に対して, Hから$(-\infty, +\infty]$への下半連続 proper 凸関数φ^tが与えられ, φ^tの effective domain Dはtに無関係である.

(II) 各$r > 0$に対して, C_r, $C_r' > 0$が存在して

$$|\varphi^s(u) - \varphi^t(u)| \leqq |s-t| \cdot [C_r \cdot \varphi^t(u) + C_r']$$

$$(0 \leqq \forall s, \forall t \leqq T, \ \|u\| \leqq r \text{ なる } \forall u \in D).$$

(III) ある $b\in D$ が存在して，$b\in D(\partial\varphi^t)$ ($a.a.\ t\in[0,T]$) かつ $\|\partial\varphi^t(b)^\circ\|$ は $0\leqq t\leqq T$ で可積分とする．ただし，$\partial\varphi^t(b)^\circ$ は閉凸集合 $\partial\varphi^t(b)$ の中のノルム最小の元を表わす。

(IV) f は $[0,T]\times H$ から H への連続写像であり，$[0,T]\times H$ の有界集合の f による像は H で有界である．

(V) ある実数 c_0 が存在して

$$(f(t,u)-f(t,v),\ u-v)\leqq c_0\|u-v\|^2\quad(\forall u,\forall v\in H).$$

定理．(I)－(V) を仮定する．任意の $a\in D$ に対して，次の i), ii) をみたす $u\in C([0,T];H)$ と $y\in L^2(0,T;H)$ が一意的に存在する：

i) $u(t)\in D$ ($\forall t\in(0,T]$)，$u(t)\in D(\partial\varphi^t)$ ($a.a.\ t\in[0,T]$) かつ $y(t)\in\partial\varphi^t(u(t))$ ($a.a.\ t\in[0,T]$).

ii) $u(t)+\int_0^t y(\sigma)d\sigma=a+\int_0^t f(\sigma,u(\sigma))d\sigma$ ($0\leqq{}^\forall t\leqq T$).

注意1．定理の u は

$$u'+\partial\varphi^t(u)\ni f(t,u)\ (0\leqq t\leqq T),\quad u(0)=a$$

の genuine solution である（[5] をみよ）．

注意2．(I)－(V) を仮定する．任意の $a\in\overline{D}$ (D の閉包)

に対して，定理の i) と次の ii) をみたす $u \in C([0,T];H)$ と $[0,T]$ 上の強可測関数 y が一意的に存在することを証明できる：

ii) 任意の $s \in (0,T]$ に対して $y \in L^2(s,T;H)$ かつ

$$\begin{cases} u(t)+\int_s^t y(\sigma)d\sigma = u(s)+\int_s^t f(\sigma,u(\sigma))d\sigma \quad (0<{}^\forall s \leqq {}^\forall t \leqq T) \\ u(0)=a. \end{cases}$$

§2. $\partial\varphi$ の吉田近似

H から $(-\infty,+\infty]$ への下半連続 proper 凸関数 φ と $\partial\varphi$ の近似に関する基本的事項を要約する．これらは本質的に Moreau [6] により得られたものである．

$\partial\varphi$ は monotone であることは容易にわかる．

$$\Phi_\lambda(u,v)=\varphi(v)+\|u-v\|^2/(2\lambda) \quad ({}^\forall\lambda>0,\ {}^\forall u,\ {}^\forall v\in H)$$

とおく．各 $\lambda>0$ と各 $u\in H$ に対して関数 $v\to\Phi_\lambda(u,v)$ が最小値をとる点が一意的に存在する．この点を $J_\lambda^\varphi u$ とかく：

(2.1) $\Phi_\lambda(u; J_\lambda^\varphi u) \leqq \Phi_\lambda(u,v) \quad (\forall\lambda>0,\ \forall u,\ \forall v\in H)$.

(2.1) から次の (2.2) を得るのは容易である：

(2.2) $(\partial\varphi)_\lambda u \equiv (u-J_\lambda^\varphi u)/\lambda \in \partial\varphi(J_\lambda^\varphi u) \quad ({}^\forall\lambda>0,\ {}^\forall u\in H)$.

したがって $\partial\varphi$ は極大 monotone であり $J_\lambda^\varphi=(I+\lambda\cdot\partial\varphi)^{-1}$ $(\lambda>0)$ である．J_λ^φ が縮小的であることと $(\partial\varphi)_\lambda$ が monotone であることはよく知られている．

$$(2.3)\quad \varphi_\lambda(u) = \varphi(J_\lambda^\varphi u) + \lambda\cdot\|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2/2 \quad (\forall\lambda>0, \forall u\in H)$$

とおく。(2.2)から，任意の $\lambda>0$，u，$v\in H$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Phi_\lambda(u,v) - \varphi_\lambda(u)\\
(2.4)\quad &= \varphi(v) - \varphi(J_\lambda^\varphi u) - (v - J_\lambda^\varphi u, (\partial\varphi)_\lambda u) + \frac{\|v - J_\lambda^\varphi u\|^2}{2\lambda}\\
&\geqq \|v - J_\lambda^\varphi u\|^2/(2\lambda).
\end{aligned}$$

Hから $(-\infty, +\infty]$ への関数 ψ の共役 ψ^* を

$$\psi^*(u) = \sup\{(u,v) - \psi(v) \mid v\in H\} \quad (\forall u\in H)$$

により定義する。下半連続proper凸関数 φ の共役 φ^* は下半連続proper凸関数である。u，$v\in H$ に対して

$$(2.5)\quad v\in\partial\varphi(u) \Longleftrightarrow \varphi(u) + \varphi^*(v) = (u,v)$$

はよく知られている。また，$(\varphi_\lambda)^*(u) = \varphi^*(u) + \lambda\cdot\|u\|^2/2$ $(\lambda>0,\ u\in H)$ は容易に確めることができる。したがってすべての $\lambda>0$ と $u\in H$ に対して

$$\begin{aligned}
&\varphi_\lambda(u) + (\varphi_\lambda)^*((\partial\varphi)_\lambda u)\\
&= \varphi(J_\lambda^\varphi u) + \varphi^*((\partial\varphi)_\lambda u) + \lambda\cdot\|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2\\
&= (J_\lambda^\varphi u, (\partial\varphi)_\lambda u) + \lambda\cdot\|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2\\
&= (u, (\partial\varphi)_\lambda u).
\end{aligned}$$

ゆえに(2.5)から $(\partial\varphi)_\lambda u\in\partial(\varphi_\lambda)u$。したがって

$$\begin{aligned}
&0 \leqq \varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - (v-u, (\partial\varphi)_\lambda u)\\
(2.6)\quad &\leqq (v-u, (\partial\varphi)_\lambda v - (\partial\varphi)_\lambda u)\\
&\leqq \|v-u\|^2/\lambda \quad (\forall\lambda>0, \forall u, \forall v\in H).
\end{aligned}$$

ゆえに φ_λ は $u\in H$ において微分可能（Fréchet の意味）であり，そのFréchet微分係数は $(\partial\varphi)_\lambda u$ である．したがって $\partial(\varphi_\lambda)u=\{(\partial\varphi)_\lambda u\}$。今後，$(\partial\varphi)_\lambda$ の代りに $\partial\varphi_\lambda$ とかく．

§3. 関数 $t\to\partial\varphi^t_\lambda$ の連続性

補題3.1. φ^1 と φ^2 は H から $(-\infty,+\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする．このとき任意の $\lambda>0$ と $u\in H$ に対し

$$\begin{aligned}&\varphi^1_\lambda(u)-\varphi^2_\lambda(u)\\ &\le \varphi^1(J^{\varphi^2}_\lambda u)-\varphi^2(J^{\varphi^2}_\lambda u)-\frac{\lambda}{2}\|\partial\varphi^1_\lambda(u)-\partial\varphi^2_\lambda(u)\|^2.\end{aligned}$$

証明. $[\varphi^1_\lambda(u)-\varphi^2_\lambda(u)]-[\varphi^1(J^{\varphi^2}_\lambda u)-\varphi^2(J^{\varphi^2}_\lambda u)]$

$$\begin{aligned}&=\varphi^1(J^{\varphi^1}_\lambda u)-\varphi^1(J^{\varphi^2}_\lambda u)+\frac{\lambda}{2}\left(\|\partial\varphi^1_\lambda(u)\|^2-\|\partial\varphi^2_\lambda(u)\|^2\right)\\ &=\varphi^1(J^{\varphi^1}_\lambda u)-\varphi^1(J^{\varphi^2}_\lambda u)-(\partial\varphi^1_\lambda u, J^{\varphi^1}_\lambda u-J^{\varphi^2}_\lambda u)+\\ &\quad+\frac{\lambda}{2}\left[\|\partial\varphi^1_\lambda(u)\|^2-\|\partial\varphi^2_\lambda(u)\|^2-2(\partial\varphi^1_\lambda(u),\partial\varphi^1_\lambda(u)-\partial\varphi^2_\lambda(u))\right]\\ &\le-\frac{\lambda}{2}\|\partial\varphi^1_\lambda(u)-\partial\varphi^2_\lambda(u)\|^2.\end{aligned}$$

補題3.2. φ^1 と φ^2 は H から $(-\infty,+\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする．ある $x\in H$，ある $\delta>0$，ある $\varepsilon>0$，ある $\varepsilon'>0$ とある $\eta\in(0,1)$ に対して

$$\begin{cases}\text{i) } \|u-J^{\varphi^1}_\lambda x\|\le\delta \text{ なる } \forall u\in H \text{ に対して}\\ \qquad \varphi^2(u)\ge(1-\eta)\varphi^1(u)-\varepsilon,\\ \text{ii) } \varphi^2(J^{\varphi^1}_\lambda x)\le\varphi^1(J^{\varphi^1}_\lambda x)+\varepsilon',\end{cases}$$

iii) $\delta^2/(2\lambda) \geqq \varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \varphi_\lambda^1(x) \equiv \alpha$

がなりたつならば

$$\|\partial\varphi_\lambda^1(x) - \partial\varphi_\lambda^2(x)\|^2 \leqq 2\alpha/\lambda.$$

証明. $i = 1, 2$ と $u \in H$ に対して

$$\Phi^i(u) = \varphi^i(u) + \|u - x\|^2/(2\lambda), \quad x_i = J_\lambda^{\varphi^i} x$$

とおく. (2.3) と (2.4) から

(3.1) $\Phi^i(u) \geqq \Phi^i(x_i) + \|u - x_i\|^2/(2\lambda) \quad (i=1,2;\ u \in H).$

i) と ii) から

(3.2) $\Phi^2(u) \geqq (1-\eta)\Phi^1(u) - \varepsilon \quad (\forall u \in H : \|u - x_1\| \leqq \delta),$

(3.3) $\Phi^2(x_1) \leqq \Phi^1(x_1) + \varepsilon'.$

$\|x_1 - x_2\| \leqq \delta$ を証明する. $\|x_1 - x_2\| > \delta$ を仮定して矛盾を導く. $\theta = \delta/\|x_1 - x_2\|$, $x_\theta = (1-\theta)x_1 + \theta x_2$ とおく.

$0 < \theta < 1$, $\|x_\theta - x_1\| = \delta$ である. (3.1), (3.2), (3.3) から

$$\begin{aligned}(1-\eta)\Phi^1(x_1) - \varepsilon &\leqq (1-\eta)\Phi^1(x_\theta) - \varepsilon \leqq \Phi^2(x_\theta)\\ &\leqq (1-\theta)\Phi^2(x_1) + \theta\Phi^2(x_2)\\ &\leqq (1-\theta)[\Phi^1(x_1) + \varepsilon'] + \theta\left[\Phi^1(x_1) + \varepsilon' - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\lambda}\right].\end{aligned}$$

これと iii) から

$$\frac{\delta^2}{2\lambda\theta} = \frac{\theta}{2\lambda}\|x_1 - x_2\|^2 \leqq \varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \Phi^1(x_1) \leqq \frac{\delta^2}{2\lambda}.$$

ゆえに $\theta \geqq 1$. 矛盾. ゆえに $\|x_1 - x_2\| \leqq \delta$.

(3.1), (3.2), (3.3) から

$$\Phi^2(x_2)+\varepsilon \geqq (1-\eta)\Phi^1(x_2) \geqq (1-\eta)\left[\Phi^1(x_1)+\|x_1-x_2\|^2/(2\lambda)\right]$$

および

$$\Phi^1(x_1)+\varepsilon' \geqq \Phi^2(x_2)+\|x_1-x_2\|^2/(2\lambda)$$

を得る．したがって

$$\varepsilon+\varepsilon'+\eta\cdot\Phi^1(x_1) \geqq \frac{2-\eta}{2\lambda}\cdot\|x_1-x_2\|^2 \geqq \frac{1}{2\lambda}\cdot\|x_1-x_2\|^2.$$

したがって

$$\|\partial\varphi^1_\lambda(x)-\partial\varphi^2_\lambda(x)\|^2=\|x_1-x_2\|^2/\lambda^2 \leqq 2\alpha/\lambda.$$

命題3.3. §1の(I)と次の(III′)を仮定する：

(III′) $h(s,t)$ は $0\leqq s,t\leqq T$ 上の非負値関数で，各 $t\in[0,T]$ に対して $s\to h(s,t)$ は $[0,T]$ で連続であり，$h(t,t)=0$ $(0\leqq t\leqq T)$ をみたす．また，各 $r>0$ に対して C_r と C_r' が存在して，

$$|\varphi^s(u)-\varphi^t(u)| \leqq h(s,t)\cdot[C_r\cdot\varphi^t(u)+C_r']$$

$$(0\leqq \forall s,\forall t\leqq T,\ \|u\|\leqq r \text{ なる } \forall u\in D).$$

このとき各 $x\in H$ と各 $\lambda>0$ に対して，$t\to\partial\varphi^t_\lambda(x)$ は $[0,T]$ において連続である．

さらに，もしある定数 $C>0$ と $\alpha\in(0,1]$ が存在して

$$(3.4)\quad h(s,t)\leqq C\cdot|s-t|^\alpha \quad (0\leqq s,t\leqq T)$$

であるならば，$t\to\partial\varphi^t_\lambda(x)$ は $[0,T]$ において $\alpha/2$ Hölder連続である．

証明．$t\in[0,T]$ を1つとって固定し，$x_t=J_\lambda^{\varphi^t}x$ とかく．$r>\|x_t\|$ とする．(II) から
$\varphi^s(u)\geqq[1-c_r\cdot h(s,t)]\cdot\varphi^t(u)-c_r'\cdot h(s,t)$
$(0\leqq s,t\leqq T,\ u\in D:\|u\|\leqq r)$
かつ
$\varphi^s(x_t)\leqq\varphi^t(x_t)+h(s,t)\cdot[c_r\cdot\varphi^t(x_t)+c_r']$.
したがって補題3.2により，sが十分tに近いとき

$$(3.5)\quad \begin{aligned}&\|\partial\varphi_\lambda^s(x)-\partial\varphi_\lambda^t(x)\|^2\\ &\leqq(4/\lambda)\cdot h(s,t)\cdot[c_r\cdot\varphi^t(x_t)+c_r'+\frac{\lambda}{4}c_r\cdot\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|^2].\end{aligned}$$

したがって $s\to\partial\varphi_\lambda^s(x)$ は $s=t$ において連続である．tは任意であったからこれは $0\leqq s\leqq T$ で連続である．

したがって，rとして次のようにとれる：

$$\max_{0\leqq t\leqq T}\|x_t\|=\max_{0\leqq t\leqq T}\|x-\lambda\cdot\partial\varphi_\lambda^t(x)\|<r.$$

したがって，(2.3) と補題3.1から $\sup\{\varphi^t(x_t)\mid 0\leqq t\leqq T\}<\infty$. したがって，ある$M>0$が存在して，(3.5) により，各$t\in[0,T]$ に対してsが十分tに近いとき

$$(3.6)\quad \|\partial\varphi_\lambda^s(x)-\partial\varphi_\lambda^t(x)\|\leqq M\cdot h(s,t)^{1/2}.$$

hが(3.4)をみたすとき，(3.6)は $t\to\partial\varphi_\lambda^t(x)$ が $0\leqq t\leqq T$ において $\alpha/2$-Hölder連続であることを示す．

§4. 定理の証明

§1の(I)−(V)を仮定する．命題3.3と $u\to\partial\varphi_\lambda^t(u)$ のLipschitz連続性により，各 $\lambda>0$ に対して，$[t,u]\to f(t,u)-\partial\varphi_\lambda^t(u)$ は $[0,T]\times H$ の上で連続であり，$[0,T]\times H$ の有界集合をHの有界集合に写像し，かつ(V)により

$$([f(t,u)-\partial\varphi_\lambda^t(u)]-[f(t,v)-\partial\varphi_\lambda^t(v)],u-v)$$
$$\leqq c_0\cdot\|u-v\|^2 \quad (\forall u,\forall v\in H)$$

をみたすから，任意の $a\in D$ に対して

$$(4.0)\begin{cases} u'(t)+\partial\varphi_\lambda^t(u(t))=f(t,u(t)), & 0\leqq t\leqq T\\ u(0)=a \end{cases}$$

の解 $u_\lambda\in C^1([0,T];H)$ が一意的に存在する([1]をみよ).

簡単のために，$y_\lambda(t)=\partial\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ とかく.

補題4.1 $\sup\{\|u_\lambda(t)\|\mid\lambda>0,\ 0\leqq t\leqq T\}<\infty$.

証明.

$u_\lambda'(t)+y_\lambda(t)=f(t,u_\lambda(t))\ (0\leqq t\leqq T)$, $u_\lambda(0)=a$ から容易に，すべての $t\in[0,T]$ に対して

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-b\|^2$$
$$=(f(t,u_\lambda)-y_\lambda,u_\lambda-b)$$
$$=([f(t,u_\lambda)-f(t,b)]-[y_\lambda-\partial\varphi_\lambda^t(b)],u_\lambda-b)+$$

$$+(f(t,b)-\partial\varphi_\lambda^t(b),\ u_\lambda-b)$$

$$\leq c_0\|u_\lambda(t)-b\|^2+(\|f(t,b)\|+\|\partial\varphi_\lambda^t(b)\|)\cdot\|u_\lambda(t)-b\|.$$

したがって，ほとんどすべての $t\in[0,T]$ に対して

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-b\|\leq c_0\cdot\|u_\lambda(t)-b\|+\|f(t,b)\|+\|\partial\varphi_\lambda^t(b)\|.$$

したがって，すべての $t\in[0,T]$ に対して

$$\|u_\lambda(t)-b\|\leq e^{c_0t}\|a-b\|+\int_0^t e^{c_0(t-\sigma)}(\|f(\sigma,b)\|+\|\partial\varphi_\lambda^\sigma(b)\|)d\sigma.$$

よく知られているように，$\|\partial\varphi_\lambda^\sigma(b)\|\leq\|\partial\varphi^\sigma(b)^0\|$ であるから(III)により，上の不等式の右辺は $0\leq t\leq T$, $\lambda>0$ において有界である。したがって $\|u_\lambda(t)\|$ もそうである。

補題4.2　BがHの有界集合ならば，$\{J_\lambda^{\varphi^t}u \mid 0\leq t\leq T,\ 0<\lambda\leq 1,\ u\in B\}$ は有界である.

証明. $\|J_\lambda^{\varphi^t}u\|\leq\|J_\lambda^{\varphi^t}v\|+\|u-v\|$ であるから，補題の証明のためには，ある $v\in B$ に対して $\{J_\lambda^{\varphi^t}v \mid 0\leq t\leq T,\ 0<\lambda\leq 1\}$ が有界であることを示せば十分である.

v を B の任意の元とする。$t\in[0,T]$ と $\lambda>0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|v-J_\lambda^{\varphi^t}v\|^2-\|v-J_1^{\varphi^t}v\|^2\\
\leq\ & 2\cdot(v-J_\lambda^{\varphi^t}v,\ (v-J_\lambda^{\varphi^t}v)-(v-J_1^{\varphi^t}v))\\
=\ & 2\lambda\cdot(\partial\varphi_\lambda^t(v),\ J_1^{\varphi^t}v-J_\lambda^{\varphi^t}v)\\
\leq\ & 2\lambda\cdot(\partial\varphi_1^t(v),\ J_1^{\varphi^t}v-J_\lambda^{\varphi^t}v)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\lambda(v - J_1^{\varphi^t} v, (v - J_\lambda^{\varphi^t} v) - (v - J_1^{\varphi^t} v)) \\
&\leqq 2\lambda \| v - J_1^{\varphi^t} v \| \cdot \| v - J_\lambda^{\varphi^t} v \| \\
&\leqq \frac{1}{2} \| v - J_\lambda^{\varphi^t} v \|^2 + 2\lambda^2 \| v - J_1^{\varphi^t} v \|^2 .
\end{aligned}
$$

また，(II) と命題 3.3 から，$t \to J_1^{\varphi^t} v$ は $[0, T]$ において連続であるから

$$
\sup_{\substack{0 \leqq t \leqq T \\ 0 < \lambda \leqq 1}} \| v - J_\lambda^{\varphi^t} v \|^2 \leqq \sup_{\substack{0 \leqq t \leqq T \\ 0 < \lambda \leqq 1}} 2(1 + 2\lambda^2) \| v - J_1^{\varphi^t} v \|^2 < \infty .
$$

したがって $\{ J_\lambda^{\varphi^t} v \mid 0 \leqq t \leqq T, 0 < \lambda \leqq 1 \}$ は有界である。

補題 4.3. $\sup \{ \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \mid 0 \leqq t \leqq T,\ 0 < \lambda \leqq 1 \} < \infty$.

証明. 補題 4.1 と補題 4.2 により，正数 r が存在して，すべての $s, t \in [0, T]$，$\mu \in (0, 1]$，$\lambda > 0$ に対して，$r > \| J_\mu^{\varphi^t} u_\lambda(s) \|$ がなりたつ．

$\lambda > 0$，$u \in H$ とする．$r > \| J_\lambda^{\varphi^s} u \|$ $(0 \leqq s \leqq T)$ ならば，補題 3.1 と (II) により，(2.3) をもちいて

$$
\begin{aligned}
& | \varphi_\lambda^t(u) - \varphi_\lambda^s(u) | \\
(4.1) \quad & \leqq \max \{ \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^s} u) - \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^s} u),\ \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^t} u) - \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u) \} \\
& \leqq |t - s| [c_r \cdot \max \{ \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^s} u), \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u) \} + c_r'] \\
& \leqq |t - s| [c_r \cdot \max \{ \varphi_\lambda^s(u), \varphi_\lambda^t(u) \} + c_r'] .
\end{aligned}
$$

したがって，とくに，$t \to \varphi_\lambda^t(u)$ は連続である．(2.6) と

(4.1)から

$$|\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))| \leqq |\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))|+|\varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))|$$
$$\leqq |(y_\lambda(s), u_\lambda(s)-u_\lambda(t))|+\|u_\lambda(s)-u_\lambda(t)\|^2/\lambda +$$
$$+|t-s|[c_r\cdot \max\{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)), \varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))\}+c_r'].$$

したがって，u_λの 1回連続強微分可能性と $\sup\{\|y_\lambda(s)\| \mid 0\leqq s\leqq T\}<\infty$とから，$t\to\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ の連続性，さらにリプシッツ連続性がわかる。(2.6)をもちいて

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))\Big|_{s=t}=(y_\lambda(t), u_\lambda'(t))$$
$$=(f(t,u_\lambda(t))-u_\lambda'(t), u_\lambda'(t))\leqq \frac{1}{4}\|f(t,u_\lambda(t))\|^2$$

最後の辺は，(IV)と補題4.1により，t，λに無関係な定数$C>0$でおさえられる。したがって，(4.1)をもちいて

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$$
$$\leqq \overline{\lim_{s\to t}}\frac{\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))}{s-t}+\lim_{s\to t}\frac{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))}{s-t}$$
$$\leqq c_r\cdot\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))+c_r'+C.$$

この不等式から，$t\to\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ の絶対連続性をもちいて

$$\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))\leqq e^{c_r\cdot t}\varphi_\lambda^0(a)+(c_r'+C)\int_0^t e^{c_r\cdot(t-\sigma)}d\sigma$$

が導かれるが，$\varphi_\lambda^0(a)\leqq\varphi^0(a)<\infty$であるから，上の不等式の右辺は$0\leqq t\leqq T$，$\lambda>0$で有界である。証明おわり。

補題 4.4. $\sup\{\int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt \mid 0<\lambda\leqq 1\}<\infty$.

証明. r は補題 4.3 の証明の r と同じものとする. $T'\in(0,T)$ と $\lambda\in(0,1]$ に対して

$$(4.2)\quad \int_0^{T'}(y_\lambda(t), f(t,u_\lambda)-y_\lambda(t))dt$$
$$=\int_0^{T'}(y_\lambda(t), u_\lambda'(t))dt$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))]dt$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\Big\{\Big(\int_{T'}^{T'+h}-\int_0^h\Big)\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))dt -$$
$$-\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))]dt\Big\}$$
$$=\varphi_\lambda^{T'}(u_\lambda(T'))-\varphi_\lambda^0(a)-$$
$$-\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))]dt.$$

(4.1) と Fatou の補題により

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))]dt$$
$$(4.3)\quad \leqq \varliminf_{h\downarrow 0}\int_0^{T'}[c_r\cdot\max\{\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h)),\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))\}+c_r']dt$$
$$\leqq \int_0^{T'}[c_r\cdot\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))+c_r']dt.$$

(4.2) と (4.3) と補題 4.3 により, ある定数 $C>0$ が存在して

$$(4.4)\quad \int_0^T\|y_\lambda(t)\|^2dt-\int_0^T(y_\lambda(t), f(t,u_\lambda(t)))dt$$
$$\leqq -\varphi_\lambda^T(u_\lambda(T))+\varphi_\lambda^0(a)+C.$$

ところで φ^T は H の各有界集合上で下から有界であるから

(2.3)をもちいて

$$\inf\{\varphi_\lambda^T(u_\lambda(T)) \mid 0<\lambda\leqq 1\} \geqq \inf\{\varphi^T(J_\lambda^{\varphi^T} u_\lambda(T)) \mid 0<\lambda\leqq 1\} > -\infty.$$

また，$\varphi_\lambda^0(a) \leqq \varphi^0(a) < \infty$ であるから，(4.4)からただちに $\int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt$ が $0<\lambda\leqq 1$ において有界であることがわかる。

定理の証明．存在．$\lambda, \mu > 0$ とする。

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 = 2(u_\lambda'(t)-u_\mu'(t), u_\lambda(t)-u_\mu(t))$$

$$= 2([f(t,u_\lambda)-f(t,u_\mu)]-[y_\lambda(t)-y_\mu(t)], u_\lambda(t)-u_\mu(t))$$

$$\leqq 2c_0\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 - 2(y_\lambda(t)-y_\mu(t), \lambda y_\lambda(t)-\mu y_\mu(t))$$

$$= 2c_0\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 - (\lambda+\mu)\|y_\lambda(t)-y_\mu(t)\|^2 -$$

$$- (\lambda-\mu)(\|y_\lambda(t)\|^2 - \|y_\mu(t)\|^2)$$

と $u_\lambda(0)=u_\mu(0)=a$ から，すべての $t\in[0,T]$ に対して

$$(4.5)\quad e^{-2c_0 t}\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 + (\lambda+\mu)\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)-y_\mu(s)\|^2 ds$$

$$\leqq (\mu-\lambda)\int_0^t e^{-2c_0 s}(\|y_\lambda(s)\|^2 - \|y_\mu(s)\|^2)\, ds.$$

したがって，$\lambda\downarrow 0$ のとき $\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)\|^2 ds$ は非減少であるが，補題4.4により

$$\sup_{0<\lambda\leqq 1}\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)\|^2 ds \leqq \sup_{0<\lambda\leqq 1}\int_0^T \|y_\lambda(s)\|^2 ds < \infty$$

であるから，$\lambda\downarrow 0$ のとき $\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)\|^2 ds$ はある有限

な数に収束する．したがって，(4.5)から，ある $u \in C([0,T];H)$ が存在して $C([0,T];H)$ において $u_\lambda \to u$ $(\lambda \downarrow 0)$．また，ある $y \in L^2(0,T;H)$ が存在して $L^2(0,T;H)$ において $y_\lambda \to y$ $(\lambda \downarrow 0)$．

このとき，$\lambda_n \downarrow 0$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} y_{\lambda_n}(t) = y(t)$ a.e. このことと $y_{\lambda_n}(t) = \partial\varphi^t_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t))$ と $u_{\lambda_n}(t) \to u(t)$ $(n \to \infty)$ から，ほとんどすべての t に対して

(4.6)　$u(t) \in D(\partial\varphi^t)$　と　$y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$

が得られる([2] Theorem 2.3.(c))．$D(\partial\varphi^t)$ は D の稠密な部分集合であるから([7])，$\overline{D(\partial\varphi^t)} = \overline{D}$．したがって，(4.6)と u の連続性から，$u(t) \in \overline{D(\partial\varphi^t)}$ がすべての $t \in [0,T]$ に対して得られる．これから

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) = u(t) \quad (0 \leqq t \leqq T)$$

が得られる．なぜならば，$u(t)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon \in D(\partial\varphi^t)$，$\|u_\varepsilon - u(t)\| \leqq \varepsilon$，をとれば

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \|J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) - u(t)\| \\
&\leqq \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \left(\|J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) - J_\lambda^{\varphi^t} u_\varepsilon\| + \|J_\lambda^{\varphi^t} u_\varepsilon - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon - u(t)\| \right) \\
&\leqq \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \left(\|u_\lambda(t) - u_\varepsilon\| + \lambda \|\partial\varphi^t(u_\varepsilon)^\circ\| + \varepsilon \right) \\
&\leqq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

がなりたつからである．したがって，φ^t の下半連続性，

(2.3)と補題4.3により

$$\varphi^t(u(t)) \leqq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t)) \leqq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) < \infty.$$

したがって，すべての $t \in [0,T]$ に対して $u(t) \in D$．i）がなりたつことがわかった．

u_λ が(4.0)の解であることから，各 $t \in [0,T]$ に対して

$$u_\lambda(t) + \int_0^t y_\lambda(\sigma)\,d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u_\lambda(\sigma))\,d\sigma.$$

上の式において，$\lambda \downarrow 0$ のときの極限をとれば，ii）がなりたつことがわかる．

一意性．$u_i \in C([0,T];H)$ と $y_i \in L^2(0,T;H)$ が i）と ii）をみたすとする $(i=1,2)$．このとき

$$\begin{cases} u_i'(t) + y_i(t) = f(t, u_i(t)) \quad a.e. \\ u_i(0) = a \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

がなりたつから，ほとんどすべての t に対して

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \\ &= (f(t,u_1) - y_1(t) - f(t,u_2) + y_2(t),\ u_1(t) - u_2(t)) \\ &\leqq c_0\|u_1(t) - u_2(t)\|^2. \end{aligned}$$

したがって

$$e^{-2c_0 t}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leqq \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 = 0$$

ゆえに $u_1(t) = u_2(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$．証明おわり．

§5. 摂動

§1 の (I), (II), (III) を仮定する. $[0,T]\times D$ から H への写像 f と $a\in D$ が与えられたとき, コーシー問題

$$(5.1)\quad \begin{cases} u'(t)+\partial\varphi^t(u(t))\ni f(t,u(t)) & (0\leqq t\leqq T)\\ u(0)=a \end{cases}$$

を考える. H が可分のとき (5.1) は次の仮定のもとで解ける.

f に対して, 次の性質をもつ近似列 $\{f_n\}$ が存在すると仮定する:

(IV_n) 各 f_n は (IV) の f の性質をもつ.

(V_n) 各 f_n は (V) の f の性質をもつ. ただし (V) における c_0 を γ_n に代えるものとする.

(VI) 各 $r>0$ と (II) の c_r と c_r' に対して

$$\|f_n(t,u)\|^2\leqq c_r\cdot\varphi^t(u)+c_r' \quad (\forall t, \forall n, \forall u\in D: \|u\|\leqq r).$$

(VII) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\gamma_\varepsilon\geqq 0$ が存在して

$$(f_n(t,u)-f_n(t,v), u-v)\leqq \varepsilon(u_1-v_1, u-v)+\gamma_\varepsilon\cdot\|u-v\|^2$$
$$(\forall t, \forall n, \forall u,v\in D(\partial\varphi^t), \forall u_1\in\partial\varphi^t(u), \forall v_1\in\partial\varphi^t(v)).$$

(VIII) 各実数 r に対して, f_n は f に $\{(t,u)\in[0,T]\times D \mid \varphi^t(u)\leqq r\}$ において一様収束する.

(IX) $\lim_{n\to\infty} u_n=u\in D$ かつ $\mathrm{weak}\lim_{n\to\infty} f_n(t,u_n)=v$ ならば, $f(t,u)=v$.

Hが可分のとき，以上の仮定のもとで，任意の $a \in D$ に対して，$u \in C([0,T]; H)$ と $y \in L^2(0,T; H)$ で

i) $u(t) \in D \ (\forall t \in [0,T])$, $y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ (a.a. t).

ii) $u(t) + \int_0^t y(\sigma)d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u(\sigma))d\sigma \ (\forall t \in [0,T])$.

をみたすものが一意的に存在することを証明することができる。

これは，たとえば，変動境界をもつ領域における非線形熱方程式に関するDirichlet境界条件0のもとでの初期値問題の解の存在の証明に応用することができる（[3]参照）.

文献

[1] F.E. Browder, Non-linear equations of evolution, Ann. of Math. 80 (1964), 485-523.

[2] M.G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Functional Anal. 3 (1969), 376-418.

[3] H. Fujita, The penalty method and some nonlinear initial value problems, to appear.

[4] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 508-520.

[5] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 493-507.

[6] J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 273-299.

[7] J. Watanabe, On nonlinear semigroups generated by cyclically dissipative sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 18 (1971), 127-137.